Cours d'analyse numérique

lundi 8 mars 2010
13:53

Résolution de systèmes d'équations non linéaires

$F(x)=x-\lambda f(x)$
Mq F est une application strictement contractante (on suppose toutes les hypothèses du théorème 3.3)
Mq qq soit $(x,y) € E^2$, $|| F(x)-F(y)|| \leq k ||x-y||$
Avec $k<1$
Soit $(x,y) € E^2$
$||F(x)-F(y)||^2=(F(x)-F(y), F(x)-F(y))$ produit scalaire
$(x-\lambda f(x)y+\lambda f(y), x-\lambda f(x)-y+\lambda f(y))$
Produit scalaire applisation bilinéaire. Application à chacune de ses deux variables
$(\lambda x1+\mu x2,y)=\lambda(x,y)+\mu(x,y)$
$(x,\lambda y1+\lambda y2)=\lambda(x,y)+\mu(x,y)$
$=(x-y,x-y||-\lambda(f(x)-f(y)||)-\lambda(f(x)-f(y),x-y||-\lambda f(x)-f(y)||)$
$=(x-y,x-y)- \lambda(x-y, f(x)-f(y))-\lambda(f(x)-f(y),x-y)+\lambda^2(f(x)-f(y),f(x)-f(y))$

$(x,y)=(y,x)$

Norme euclidienne ou norme 2
$||u||=\sqrt{}(u,u)$

Donc
$||F(x)-F(y)||^2=(x-y , x-y)-2\lambda(x-y , f(x)-f(y))+\lambda^2 (f(x)-f(y), f(x)-f(y))$
$=||x-y||^2-2\lambda(x-y, f(x)-f(y))+ \lambda^2||f(x)-f(y)||^2$

Par hypothèse $||f(x)-f(y)||^2 \leq \Pi^2 ||x-y||^2$
$(x-y, f(x)-f(y)) \geq \alpha||x-y||^2$

Donc $||F(x)-F(y)||^2 \leq (1-2\lambda \alpha+ \Pi^2)||x-y||^2$
$\Rightarrow || ||F(x)-F(y)|| \leq \sqrt{} (1-2\lambda \alpha+ \Pi^2)||x-y||$
└→=k

Question K>1
Par hypothèse $\lambda< (2\alpha/\Pi^2) \Leftrightarrow \lambda\Pi^2<2\alpha$
$\Leftrightarrow \lambda^2\Pi^2-2\alpha\lambda<0$
Donc $1+\lambda^2\Pi^2-2\alpha\lambda<1$
Donc qq soit $(x,y) € E^2$ $|| F(x)-F(y)|| \leq k ||x-y||$ avec $k=1+\lambda^2\Pi^2-2\alpha\lambda<1$
$y(n+1)=y(n)- (f(y(n))/f'(y(n))$ car d=1

Jacobienne de F
f: Rd-->Rd
x-->(f1(x))
|
|
(fd(x))

Jacobienne de f en x = Df(x)=   (m=n=d)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

d=1=> intervalle centrée en d
d=2=> $B(u,2)= \{x \in R^2, ||x-u|| \leq 2\}$
u=(1)
(2)

$||x-u||^2=(x-y, x-u)$
$=(x1-1)^2+(x2-2)^2 \leq 4$

$(x1-a)^2+(x2-b)^2=c^2$ cecle de centre (a,b) et de rayon c
Si d=3 => sphère

Chapitre 3: interpolation polynomiale et approximation

l'interpolation polynomiale: échantillonnage de points et recherche d'un polynôme qui passe par tous ces points
Approximation polynomiale: échantillonnage de points et recherche d'un polynôme qui passe au plus près de tous les points (idée de régression linéaire)

Rq: les polynômes L_i forment une base de l'ensemble des polynômes de degré au plus n P_n

La formule de Newton:

- Un seul point x_0
  $P_0(x_0)=f(x_0)$ ---> polynome constant
- 2 points x_0 x_1
  $P_0(x)=P_0(x_0)+ R_1(x)$
  $P_1(x_0)= f(x_0)= P_0(x_0)$
  $P_1(x_1)=f(x_1)$
  $P_1(x)=ax+b$
  $R_1(x_0)=0$
  $\Rightarrow R_1(x)=b(x-x_0)$
  $f(x_1)=P_1(x_1)=f(x_0)+R_1(x_1)=f(x_0)+b(x-x_0)$
  $\Rightarrow b=f(x_1)+f(x_0)=f[x0,x1]$
  $\Rightarrow P_1(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)$
- 3 points x_0 x_1 x_2
  $P_2(x)=P_2(x)+R_2(x)$
  $P_2(x_0)= f(x_0)\Rightarrow R_1(x_0)=0$ car $P_1(x_0)=f(x_0)$
  $P_2(x1)= f(x1)\Rightarrow R_1(x_1)=0$ car $P_1(x_1)=f(x_1)$
  $\Rightarrow R_1(x)=b(x-x_0)(x-x_1)$
  $P_2(x_2)=f(x_2)$
  $\Rightarrow f(x_2)=P1(x2)+b(x2-x0)(x2-x1)$
  $\Rightarrow b=(f(x2)-P1(x2))/(x1-x0)(x2-x1)$
  $\Rightarrow b=(f(x2)-(f(x0)+f(x0,x1)(x2,x0))/(x1-x0)(x2-x1)$
  $\Rightarrow b=(f[x1,x2]-f[x0,x1])/x2-x0= f[x0,x1,x2]$ ----> différence divisée.

Conclusion $P_n(x)=f(x_0)+f[x0,x1](x-x0)+f[x0,x1,x2](x-x0)-x-x1)+ a_{n-1}$ produit des $(x-x_i)$ i allant de 0 à n-2
$= P_{n-1}(x)+a_n$ produit des $(x-x_i)$ i allant de 0 à n-1

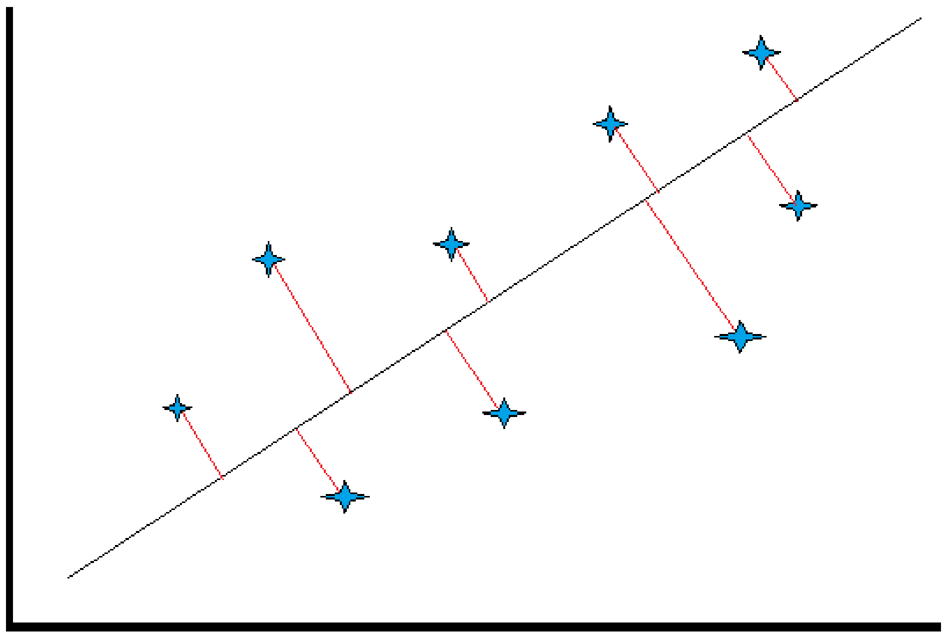
Rq th 1.5:
Prendre beaucoup de points n'améliore pas nécessairement les choses: tout dépend du choix des points
Ex: $f(x)=1/(1+x^2)$, $x \in [-5, 5]$
si on prend des points équirépartis => oscillations.
=> phénomène de Runge.

II) Approximation au sens des moindres carrés

But: donner une approximation de la fonction f qui a pu engendre ces points en utilisant l'approximation polynomiale par moindres carrés.

On cherche un polynôme $P_m(x)= a_0+a_1x+........+a_mx^m$
La donnée des points (x_i,y_i) défint un système linéaire AX=Y à résoudre
Attention: système de (n+1) équation à (m+1) inconnues!
Plus d'équations que d'inconues
Problème surdéterminé qui en général n'admet pas de solution.
Matrice X: m+1 lignes car m+1 données
Matrice A: n+1 lignes
Matrice Y: n+1 lignes

1) Exemple de la droite de régression linéaire



Exemple: n+1= 3 : (x0,y0) (x1,y1) (x2,y2)

r= AX-Y

Avec A= $\begin{pmatrix} x0 & 1 \\ x1 & 1 \\ x2 & 1 \end{pmatrix}$ X= $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ Y= $\begin{pmatrix} y0 \\ y1 \\ y2 \end{pmatrix}$

$||r||^2_2={}^t rr= {}^t(AX-Y)(AX-Y)= ({}^t(AX)-{}^tY) (AX-Y)$
$=({}^tX{}^tA-{}^tY)(AX-Y)$
$= {}^tX{}^tAAX- 2\, {}^tX{}^tAY + {}^tYY$

${}^tAA= U$
${}^tAY=S$
Alors $||r||^2_2= {}^tXUX-2{}^tXS+ {}^tYY$
Avec U= $\begin{pmatrix} x0^2+x1^2+x2^2 & x0+x1+x2 \\ x0+x1+x2 & 3 \end{pmatrix}$

S= $\begin{pmatrix} x0y0+x1y1+x2y2 \\ y0+y1+y2 \end{pmatrix}$
On doit trouver a et b tel que
Grad $({}^trr)= 0$
Grad $({}^trr)$ = grad $({}^tXUX)$- 2 grad $({}^tXS)$+grad $({}^tYY)$

Grad $({}^tXUX)$= 2UX
UX= $\begin{pmatrix} a(x0^2+x1^2+x2^2)+b(x0+x1+x2) \\ a(x0+x1+x2)+3b \end{pmatrix}$
${}^tXUX=a^2(x0^2+x1^2+x2^2)+2ab\, (x0+x1+x2)+ 3b^2$

$$\mathrm{Grad}({}^tXUX) = \begin{pmatrix} \delta({}^tXUX)/\delta a \\ \delta({}^tXUX)/\delta b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a(x0^2+x1^2+x2^2)+2b(x0+x1+x2) \\ 2a(x0+x1+x2)+6b \end{pmatrix} = 2UX$$

Grad(^tXS)=S
Grad(^tYY)=0
Donc grad(^trr)= 2UX-2S=2(UX-S)=0
D'où on doit résoudre UX=S ou encore $^tAAX= {}^tAY$

2) Problèmes de moindres carrés

Rappel: on appelle rang d'une matrice C et on note rg(C) le nombre de vecteurs ligne linéairement indépendants.
Rq 2.5: semie définie positive ≠ définie positive
Une matrice M est semi-définie positive si :
  (Mx,X)≥0 qq soit x
  Toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles

Démo rq 2.5

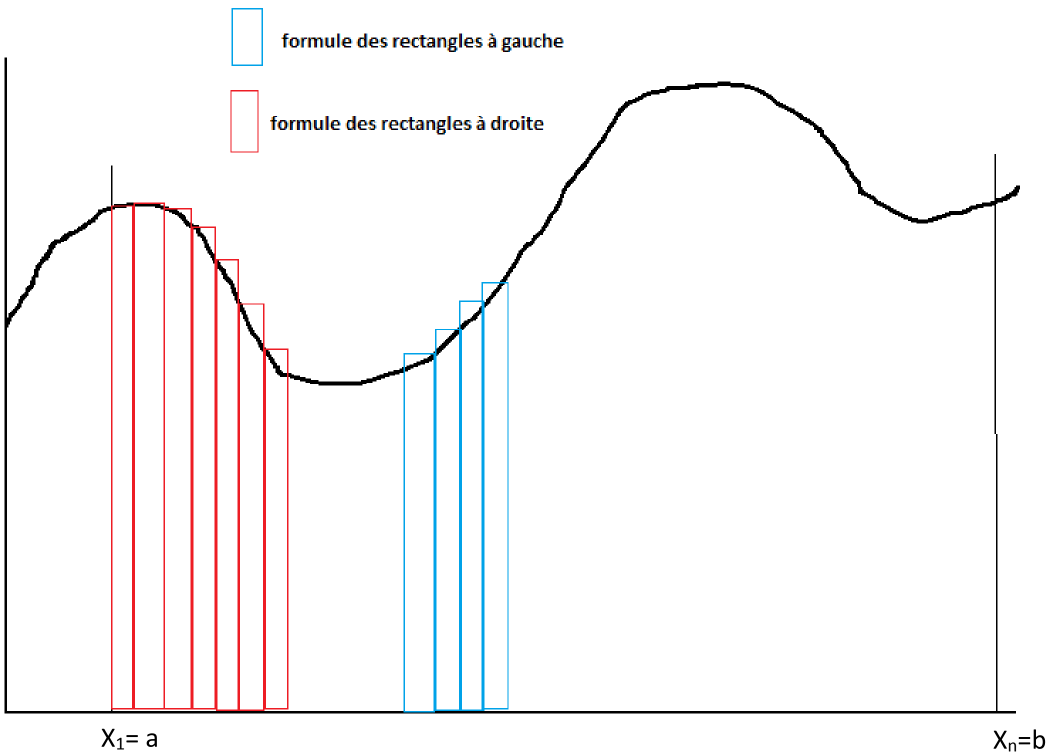
- $^t({}^tAA)={}^tA{}^t({}^tA)={}^tAA$ => symétrique
- $({}^tAAx,x)={}^tx{}^tAAx={}^t(Ax)Ax=(Ax,Ax)=||Ax||^2_2 \geq 0$

Note: rg (A) < m+1 ==> infinité de solutions on choisit celle dont la norme 2 est la plus petite.

Yp- Y € M orthogonale
Qq soit Θ € M(Yp-Y, Θ)=0
Θ € M => il existe X_Θ tq AX_Θ= Θ
Donc (Yp-Y)= (Yp-Y,AX_Θ)= $^t(AX_\Theta)$(Yp-Y)= $^tX_\Theta{}^tA$(Yp-Y)=$^tX_\Theta({}^tAYp-{}^tAY)$
Et (Yp-Y,Θ)= 0 qq soit Θ $^tX_\Theta({}^tAYp-{}^tAY)$ =0 qq soit Θ
$^tAYp-{}^tAY=0$
Yp € M => il existe /X tq A(/X)=Yp
d'où ^tAA(/X)- $^t(AY)$=0

Chapitre 4 : Quadrature numérique

I) Introduction
II) Formules des rectangles



III) Formules de Newton-Cotes

Définitions: soit [a,b] C R

1) On appelle subdivision de [a,b] la donnée de n+1 points $x0=a<x1<\dots\dots<x_n=b$
2) Les points x_i de la subdivision sont appelés les nœuds de la subdivision
3) La subdivision est régulière si son pas est constant (le pas = $x_{i+1}-x_i$)
   Elle est donnée par $x_i=a+(b-a)i/n$

$Y_j= c+j(d-c)/n+1$

j=1 : $y_1=c+(d-c)/n+1 >c$ par définition   de même j=n : $Y_n<d$

2) Formule des trapèzes

Recherche de P

Sur $[x_i,x_{i+1}]$ on va chercher le polynôme d'interpolation de f de degré 1 aux points x_i,x_{i+1}

P(x)= ax+b et on a:

$P(x_i)= f(x_i)$

$P(x_{i+1})= f(x_{i+1})$

$ax_i+b= f(x_i)$

$ax_{i+1}+b= f(x_{i+1})$

=> $a = (f(x_{i+1})-\ f(x_i))/x_{i+1}-\ x_i$ et $b= (\ x_if(x_{i+1})x_{i+1}f(x_i))/x_i-x_{i+1}$

$$\int_{xi}^{xi+1} f(x)dx \ \approx \int_{xi}^{xi+1} P(x)dx = \int_{xi}^{xi+1} (ax+b)dx = [\frac{1}{2}\ ax^2+bx]$$

$$=\frac{1}{2}(f(x_{i+1})x_{i+1}+\frac{1}{2}\ (f(x_{i+1})x_i\ -\frac{1}{2}\ f(x_i)x_{i+1}\ -\frac{1}{2}f(x_i)x_i\ \dots(il\ manque\ un\ bout)$$