

Cours d'analyse numérique

lundi 8 mars 2010

13:53

Résolution de systèmes d'équations non linéaires

$$F(x) = x - \lambda f(x)$$

Mq F est une application strictement contractante (on suppose toutes les hypothèses du théorème 3.3)

$$\text{Mq qq soit } (x, y) \in E^2, \quad \|F(x) - F(y)\| \leq k \|x - y\|$$

Avec $k < 1$

Soit $(x, y) \in E^2$

$$\|F(x) - F(y)\|^2 = (F(x) - F(y), F(x) - F(y)) \quad \text{produit scalaire}$$

$$(x - \lambda f(x) - y + \lambda f(y), x - \lambda f(x) - y + \lambda f(y))$$

Produit scalaire application bilinéaire. Application à chacune de ses deux variables

$$(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda(x, y) + \mu(x, y)$$

$$(x, \lambda y_1 + \lambda y_2) = \lambda(x, y) + \mu(x, y)$$

$$= (x - y, x - y) - \lambda(f(x) - f(y), x - y) - \lambda(f(x) - f(y), x - y) + \lambda^2(f(x) - f(y), f(x) - f(y))$$

$$= (x - y, x - y) - 2\lambda(x - y, f(x) - f(y)) + \lambda^2(f(x) - f(y), f(x) - f(y))$$

$$(x, y) = (y, x)$$

Norme euclidienne ou norme 2

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)}$$

Donc

$$\|F(x) - F(y)\|^2 = (x - y, x - y) - 2\lambda(x - y, f(x) - f(y)) + \lambda^2(f(x) - f(y), f(x) - f(y))$$

$$= \|x - y\|^2 - 2\lambda(x - y, f(x) - f(y)) + \lambda^2\|f(x) - f(y)\|^2$$

$$\text{Par hypothèse } \|f(x) - f(y)\|^2 \leq \pi^2 \|x - y\|^2$$

$$(x - y, f(x) - f(y)) \geq \alpha \|x - y\|^2$$

$$\text{Donc } \|F(x) - F(y)\|^2 \leq (1 - 2\lambda\alpha + \pi^2\lambda^2) \|x - y\|^2$$

$$\Rightarrow \|F(x) - F(y)\| \leq \sqrt{1 - 2\lambda\alpha + \pi^2\lambda^2} \|x - y\|$$

$$\hookrightarrow = k$$

Question $K > 1$

$$\text{Par hypothèse } \lambda < (2\alpha/\pi^2) \Leftrightarrow \lambda\pi^2 < 2\alpha$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2\pi^2 - 2\alpha\lambda < 0$$

$$\text{Donc } 1 + \lambda^2\pi^2 - 2\alpha\lambda < 1$$

$$\text{Donc qq soit } (x, y) \in E^2 \quad \|F(x) - F(y)\| \leq k \|x - y\| \quad \text{avec } k = 1 + \lambda^2\pi^2 - 2\alpha\lambda < 1$$

$$y(n+1) = y(n) - (f(y(n)))/f'(y(n)) \quad \text{car } d=1$$

Jacobienne de F

f: $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$

$x \mapsto (f_1(x))$

|
|
(fd(x))

Jacobienne de f en $x = Df(x) = (m=n=d)$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$d=1 \Rightarrow$ intervalle centrée en d

$d=2 \Rightarrow B(u,2) = \{x \in \mathbb{R}^2, ||x-u|| \leq 2\}$

$u=(1)$

(2)

$||x-u||^2 = (x-y, x-u)$

$$= (x_1-1)^2 + (x_2-2)^2 \leq 4$$

$(x_1-a)^2 + (x_2-b)^2 = c^2$ cercle de centre (a,b) et de rayon c

Si $d=3 \Rightarrow$ sphère

Chapitre 3: interpolation polynomiale et approximation

l'interpolation polynomiale: échantillonnage de points et recherche d'un polynôme qui passe par tous ces points

Approximation polynomiale: échantillonnage de points et recherche d'un polynôme qui passe au plus près de tous les points (idée de régression linéaire)

Rq: les polynômes L_i forment une base de l'ensemble des polynômes de degré au plus n P_n

La formule de Newton:

- Un seul point x_0
 $P_0(x_0) = f(x_0) \rightarrow$ polynome constant
- 2 points x_0, x_1
 $P_0(x) = P_0(x_0) + R_1(x)$
 $P_1(x_0) = f(x_0) = P_0(x_0)$
 $P_1(x_1) = f(x_1)$
 $P_1(x) = ax + b$
 $R_1(x_0) = 0$
 $\Rightarrow R_1(x) = b(x - x_0)$
 $f(x_1) = P_1(x_1) = f(x_0) + R_1(x_1) = f(x_0) + b(x_1 - x_0)$
 $\Rightarrow b = f(x_1) - f(x_0) = f[x_0, x_1]$
 $\Rightarrow P_1(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0)$
- 3 points x_0, x_1, x_2
 $P_2(x) = P_2(x) + R_2(x)$
 $P_2(x_0) = f(x_0) \Rightarrow R_1(x_0) = 0$ car $P_1(x_0) = f(x_0)$
 $P_2(x_1) = f(x_1) \Rightarrow R_1(x_1) = 0$ car $P_1(x_1) = f(x_1)$
 $\Rightarrow R_1(x) = b(x - x_0)(x - x_1)$
 $P_2(x_2) = f(x_2)$
 $\Rightarrow f(x_2) = P_1(x_2) + b(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$
 $\Rightarrow b = (f(x_2) - P_1(x_2)) / ((x_1 - x_0)(x_2 - x_1))$
 $\Rightarrow b = (f(x_2) - (f(x_0) + f[x_0, x_1](x_2 - x_0))) / ((x_1 - x_0)(x_2 - x_1))$
 $\Rightarrow b = (f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]) / (x_2 - x_0) = f[x_0, x_1, x_2] \rightarrow$ différence divisée.

Conclusion $P_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_{n-1}$ produit des $(x - x_i)$ i allant de 0 à $n-2$
 $= P_{n-1}(x) + a_n$ produit des $(x - x_i)$ i allant de 0 à $n-1$