Devoir surveillé du mardi 3 novembre 2009, durée 2 heures
A L'EXCLUSION DES LIVRES, LES DOCUMENTS SONT AUTORISÉS.
LES CALCULATRICES SONT INTERDITES.

Exercice 1

Soit ϕ la fonction définie sur $[0,\pi[$ par $\phi(t) = t$. Soient les deux fonctions f et g , **2π-périodiques**, respectivement **paire** et **impaire**, et égales à ϕ sur $[0,\pi[$, avec $f(\pi) = \pi$ et $g(\pi) = 0$.

1) Représenter f et g, puis pour chacune de ces deux fonctions :
   a) calculer ses coefficients de Fourier,
   b) discuter la convergence de sa série de Fourier.
2) A l'aide de valeurs de t bien choisies, donner les sommes des séries

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2p+1)^2} + \cdots \quad \text{et} \quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{(-1)^p}{2p+1} + \cdots$$

3) La question 1)b) conduit à deux écritures de $\phi(t)$ comme somme d'une série trigonométrique sur $]0,\pi[$.
   a) Y a-t-il une contradiction ?
   b) Proposer une méthode pour obtenir une troisième écriture différente des précédentes.

Exercice 2

Soit Λ la fonction triangle définie par $\Lambda(t) = 1 - |t|$ si $t \in [-1,1]$ et $\Lambda(t) = 0$ sinon.
Soit la fonction f telle que $f(t) = 2\pi t\Lambda(t)$ pour tout t.

1) Représenter sur la même figure Λ et f.
2) Donner la transformée de Fourier de Λ. On justifiera son existence.
3) Sans calcul d'intégrale, mais à l'aide de propriétés de la transformée de Fourier, calculer la transformée de Fourier de f (on justifiera aussi son existence) .

Exercice 3

1) Soit la fonction s telle que $s(t) = 1$ si $t > 0$, $s(t) = -1$ si $t < 0$ et $s(0) = 0$.
   a) Cette fonction est-telle dérivable ?
   b) Calculer la dérivée de la distribution induite par s.
2) Calculer les transformées de Fourier au sens des distributions des fonctions s, $t \mapsto \exp(6i\pi t)$ et $t \mapsto \cos(2\pi t)$.

Barème envisagé : exo 1 : 10 points, exo 2 : 6 points, exo 3 : 4 points.