Équations différentielles

Nicolas Lefebvre, p2snico@gmail.com

8 octobre 2009

1 Équation différentielle (ED) du 1er ordre

1.1 Équation linéaire : $y' + a(x)y = f(x)$

1.1.1 Constante (a) fixe

$y' - ay = 0$ Solution : $y = Ce^{ax}$ sur $\mathbb{R}$ avec $C \in \mathbb{R}$

1.1.2 Constante (a) continue sur I

$y' - a(x)y = 0$ Solution : $y = Ce^{A(x)}$ sur $\mathbb{R}$ avec $C \in \mathbb{R}$ et $A(x)$ la primitive de $a(x)$.

1.1.3 Avec Second Membre (SM)

$y' - a(x)y = f(x)$
Méthode :

1. On résoud l'Équation Sans Second Membre (ESSM) (ou Équation Homagène) $y' - a(x)y = 0$: solution $y_H = Ce^{A(x)}$.
2. On cherche une Solution Particulière (SP), y_P.
   (a) Test des fonctions simples (constante, polynomes, puissances...)
   (b) Variation de la constante
      - On cherche une SP de l'équation sous la forme $y = C(x)e^{A(x)}$
      - D'où $y' = C'(x)e^{A(x)} + a(x)C(x)e^{A(x)}$
      - On reporte dans l'équation : $C'(x)e^{A(x)} + a(x)C(x)e^{A(x)} - a(x)C(x)e^{A(x)} = f(x)$
      - On obtient $C'e^{A(x)} = f(x) \Leftrightarrow C' = f(x)e^{-A(x)}$
      - On cherche C : $C(x) = \int f(x)e^{-A(x)}.dx$
      - D'où la SP $s_p = e^{A(x)}C(x) = e^{A(x)} \int f(x)e^{-A(x)}.dx$

      (Dans la pratique on ne sais pas toujours calculer $A(x)$ ni $C(x)$)
3. La Solution Générale (SG) de l'équation est $y = y_H + y_P$, $C \in \mathbb{R}$

1.2 Variables Séparables (VS)

Dans la pratique on pose les calculs comme ceci (si nécessaire on peux utiliser un changement de variable, par exemple $t = \frac{y}{x}$) : on écrit

$$g(y)y' = f(x)$$

de la façon suivante

$$g(y)\frac{dy}{dx} = f(x)$$

ce que l'on peut encore écrire

$$g(y)dy = f(x)dx$$

ce qui, en intégrant des deux cotés donne

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx \Leftrightarrow G(y) = F(x) + C$$

1.3 Équations homogènes

Équations de la forme

$$y'(x) = F\left(\frac{y(x)}{x}\right)$$

On pose $\frac{y}{x} = t$ soit $y = tx$ et on résout avec la fonction t : $y' = (tx)' = F(t)$ et on se retrouve avec une ED à VS.

1.4 Explicite générale

De la forme

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

Méthode :

1. Regarder si c'est une Différentielle Totale (DT) $\Leftrightarrow \exists U(x,y)$ tel que :

$$\Rightarrow dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy \Leftrightarrow Pdx + Qdy \Leftrightarrow \frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$$

2. On résout

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dU}{dx} = P(x,y) \\ \frac{dU}{dy} = Q(x,y) \end{array} \right. \Rightarrow U \text{ étant une constante.}$$